210	Séries entières de variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.	Relations sur les rayons	Monier 4 p.86, 94, 95.

Relations sur les rayons: comparaison, somme, dérivée.

Prop 2: Comparaison des rayons. Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux SE de rayons respectifs R_a et R_b.

Si $\left(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|\right)$, alors $R_a \geq R_b$.

Si $\left(\forall n \in \mathbb{N}, a_n \underset{n\infty}{=} O(b_n)\right)$, alors $R_a \geq R_b$.

Si $\left(\forall n \in \mathbb{N}, a_n \underset{n\infty}{\sim} b_n\right)$, alors $R_a = R_b$.

Prop 4: Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux SE. On considère $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ la **série somme.**

Alors $R_{a+b} \geq Min(R_a, R_b)$, égalité si $R_a \neq R_b$.

Prop 5: la SE et la SE dérivée ont **même rayon de cv.**

I. Prop. 2: Comparaison.

Prop 2: Comparaison des rayons. Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux SE de rayons respectifs R_a et R_b.

Si $\left(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|\right)$, alors $R_a \geq R_b$.

Si $\left(\forall n \in \mathbb{N}, a_n \underset{n\infty}{=} O(b_n)\right)$, alors $R_a \geq R_b$.

Si $\left(\forall n \in \mathbb{N}, a_n \underset{n\infty}{\sim} b_n\right)$, alors $R_a = R_b$.

- Si $(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|)$, alors $R_a \geq R_b$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < R_b$.
D'après le th-Def 2, on a $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ cv. abs.
Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$, donc $|a_n z^n| \leq |b_n z^n|$
La série numérique $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ converge car majorée par $\sum_{n\geq 0} |b_n z^n|$ cv.
Donc $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument, et par suite $|z| \leq R_a$.

Ainsi, $|z| < R_b \Rightarrow |z| \leq R_a$, donc $R_a \geq R_b$.

- Si $(\forall n \in \mathbb{N}, a_n = O(b_n))$, alors $R_a \geq R_b$.

$a_n = O(b_n)$ signifie: $\exists N \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall n \geq N$, $|a_n| \leq M.|b_n|$
Or $\sum_{n\geq 0} M b_n z^n$ est de rayon $\geq R_b$ (car $|z| \leq R_b \Rightarrow M\sum b_n z^n$ cv $\Rightarrow |z| \leq R_{Mb}$)
Donc, d'après ce qui précède, $R_a \geq R_b$.

- Si $(\forall n \in \mathbb{N}, a_n \underset{n\infty}{\sim} b_n)$, alors $R_a = R_b$.

$|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow \begin{cases} |a_n| = O(|b_n|) \\ |b_n| = O(|a_n|) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_a \geq R_b \\ R_b \geq R_a \end{cases} \Rightarrow R_a = R_b$.

II. Prop.4: Somme.

Prop 4: Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux SE. On considère $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ la **série somme.**

Alors $R_{a+b} \geq Min(R_a, R_b)$, égalité si $R_a \neq R_b$.

$\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ deux SE

$\sum (a_n+b_n) z^n$ série somme

Alors $\underbrace{R_{a+b} \geq Min(R_a, R_b)}$, égalité si $R_a \neq R_b$

ie $\begin{cases} \text{si } R_a = R_b, & R_{a+b} \leq (R_a = R_b) \\ \text{si } R_a \neq R_b, & R_{a+b} = Min(R_a, R_b) \end{cases}$

• Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < Min(R_a, R_b)$. Alors $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$.

Donc $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ cv en tant que séries numériques,

donc $(\sum a_n z^n + \sum b_n z^n) = \sum (a_n+b_n) z^n$ cv (Cf leçon séries numérique).

• Supposons par exemple $R_a < R_b$ (on ne perd pas en généralité, les rôles de a et de b étant symétriques), et montrons qu'il y a égalité.

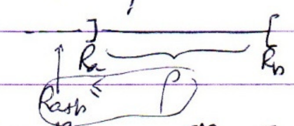
On a, d'après ce qui précède, $R_{a+b} \geq R_a$.

Soit ρ : $R_a < \rho < R_b$. Alors $\begin{cases} \sum a_n \rho^n \text{ dv car } \rho > R_a \\ \sum b_n \rho^n \text{ cv car } \rho < R_b \end{cases}$

Donc la série numérique $\sum (a_n\rho^n + b_n\rho^n)$ dv.

Donc $\rho \geq R_{a+b}$, pour tout $\rho \in]R_a ; R_b[$.

Donc $R_{a+b} \leq R_a$.



Comme $R_{a+b} \geq Min(R_a, R_b) = R_a$, on a $R_{a+b} = R_a = Min(R_a, R_b)$.

III. Prop. 5: Dérivée.

Prop 5: la SE et la SE dérivée ont **même rayon de cv.**

La SE et la SE dérivée ont même rayon de cv.

- $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon R_a, série dérivée $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$, de rayon R_a'.

- $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ cv ssi $\sum_{n \geq 1} n a_n z^n$ cv.
(multiplication par une constante z fixée non nulle, z fixé dans $\mathbb{C}^*$).
Donc R_a' est le rayon de $\sum_{n \geq 1} n a_n z^n$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq |n a_n| \Rightarrow R_a \geq R_a'$

- Mq $R_a' \leq R_a$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < R_a$. $\exists \rho \in \mathbb{R}_+$ tq $|z| < \rho < R_a$.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|n a_n z^n| = |a_n \rho^n| \cdot \left(n \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right)$
Or $0 \leq \rho < R_a$, donc $(a_n \rho^n)_n$ est bornée.
Comme $\left(n \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right) \longrightarrow 0$ qd $n \to \infty$
on a $|n a_n z^n| \xrightarrow[n \infty]{} 0$, donc $n a_n z^n \xrightarrow[n \infty]{} 0$ donc $|z| \leq R_a'$ (contraposée Th-Déf 2, 2e ligne)
Ainsi, $|z| < R_a \Rightarrow |z| \leq R_a'$, donc $R_a \leq R_a'$, d'où $R_a = R_a'$.